ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1979

MATHEMATIQUES : durée : 2 h

2e épreuve

Cette épreuve est destinée aux Elèves des classes de Mathématiques Spéciales M, M', T, P, P', et TA.

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte de la présentation, de la clarté de la rédaction, de la rigueur des raisonnements et du choix de la solution proposée.

I

Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé, on note (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point du plan et (r, θ) ses coordonnées polaires.

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, on définit la forme différentielle

$$\omega(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

où $P(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ et $Q(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

1° On pose $\omega^*(r,\theta) = \omega(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $r > 0$ $\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$

Exprimer ω^* sous la forme $\omega^*(r,\theta) = R(r,\theta)\,dr + S(r,\theta)\,d\theta$

2° En déduire qu'il existe une fonction réelle G une fois continûment différentiable dans Ω telle que

$G(x, x) = 0$ $\quad \forall\, x \neq 0$ et $\omega(x, y) = dG(x, y)$

Calculer G(x, y)

3° Soit les points A $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ et B $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

L_1 le segment orienté $\overrightarrow{AB}$, L_2 le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ centré à l'origine, de rayon 1, orienté positivement.

Montrer que l'on a

$$\int_{L_1} \omega = \int_{L_2} \omega$$

et calculer la valeur commune.

II

1° Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$x \longrightarrow I_0(x) = \int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

a) Montrer que I_0 est bien définie et indéfiniment dérivable.

b) Montrer que I_0 est solution de l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad x\,I_0''(x) + I_0'(x) + x\,I_0(x) = 0$$

2° Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$x \longrightarrow I_1(x) = \int_0^1 \frac{y \sin xy}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

a) Comparer I_0 et I_1

b) Montrer que I_1 est solution de l'équation différentielle.

$$(E_1) : \quad x^2 I_1''(x) + x\,I_1'(x) + (x^2 - 1)\,I_1(x) = 0$$

3° Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère

$$(F_\lambda) : \qquad U''(r) + \frac{\lambda}{r}\,U(r) = 0$$

On pose pour $r > 0$: $U(r) = \sqrt{r}\,V(\alpha\sqrt{r})$; montrer que par un choix convenable de α en fonction de λ, la fonction $x \longrightarrow V(x)$ vérifie une équation analogue à (E_1).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail